Вопросы по темам «Счётные множества», «Мощность множества»

(в том числе уже рассмотренные на лекции или на практике)

1. Постройте взаимно однозначные отображения для следующих множеств:

- N и Z

- N и N×N

- Интервалы (a,b) и (c,d), a<b, c<d

- Интервал (0,1) и вещественная ось **R**

**-** Интервал (0,1) и множество (0,1]

**-** Интервал (0,1) и отрезок [0,1]

**-** Множество монотонно возрастающих последовательностей натуральных чисел и множество всех последовательностей натуральных чисел (не обязательно монотонных)

**-** Множество бесконечных последовательностей, состоящих из нулей и единиц, и множество подмножеств натурального ряда

**-** Множество подмножеств интервала (a,b) и множество функций на этом интервале, принимающих значения 0 и 1

1. Доказать, что

- объединение счётного множества и конечного счётно

- объединение двух счётных множеств счётно

- объединение конечного числа счётных множеств счётно

- объединение счётной совокупности счётных множеств счётно

- любое бесконечное множество содержит счётное подмножество

- объединение бесконечного множества с конечным или счётным равномощно исходному

- разность бесконечного несчётного множества и счётного (конечного) равномощно исходному

1. Доказать, что счётными являются множества:

- чётных чисел

- квадратов натуральных чисел

- упорядоченных пар натуральных чисел

- рациональных чисел

- конечных подмножеств натурального ряда N

- конечных последовательностей из нулей и единиц

- конечных слов, состоящих из букв конечного алфавита

- конечных последовательностей натуральных чисел, не превосходящих заданного числа n (эта задача эквивалентна предыдущей)

- всевозможных конечных последовательностей натуральных чисел

- всевозможных конечных последовательностей рациональных чисел

- всех интервалов (a,b) с рациональными концами

1. Представить натуральный ряд в виде объединения счётной совокупности непересекающихся счётных множеств
2. Доказать, что следующие множества конечны или счётны:

- множество попарно не пересекающихся интервалов, заданных на оси

- множество попарно не пересекающихся кругов на плоскости

- множество, содержащее вещественные положительные числа, если известно, что все конечные суммы таких чисел ограничены некоторым фиксированным числом

1. Доказать, что следующие множества имеют различную мощность:

- N и множество бесконечных последовательностей из нулей и единиц

- произвольное множество и множество его подмножеств (сравните доказательство в случае натурального ряда с решением предыдущей задачи!)

- произвольное числовое множество и множество вещественнозначных функций, заданных на этом множестве

1. Определить мощности следующих множеств:

- бесконечных последовательностей, состоящих из нулей и единиц

- подмножеств натурального ряда

- бесконечных последовательностей элементов конечного алфавита

- бесконечных последовательностей натуральных чисел

- бесконечных монотонно возрастающих последовательностей натуральных чисел

- бесконечных последовательностей рациональных чисел

- конечных последовательностей действительных чисел

- бесконечных последовательностей действительных чисел

- иррациональных чисел

- алгебраических чисел

- трансцендентных чисел

- точек квадрата

- точек плоскости

- точек плоскости с рациональными координатами

- точек плоскости с иррациональными координатами

- точек n-мерного пространства

- отрезков на прямой

- отрезков рациональной длины на прямой

1. Постройте взаимно однозначные отображения для следующих множеств

- точек отрезка длины 1 и квадрата со стороной 1

- точек отрезка длины 1 и куба со стороной 1

Задачи в основном были уже рассмотрены, а те, что не рассмотрены, похожи на рассмотренные. Прочтите список задач и убедитесь, что любую из них вы сможете решить (или воспроизвести доказательство, которое было на лекции). Если это не так - отметьте пункты, вызывающие затруднения. Некоторые вопросы друг друга дублируют полностью или частично. Какие именно?